



TITLE:

射影空間の高次接バンドル
(Extraordinary cohomology
theories研究会報告集)

AUTHOR(S):

大池, 宏清

CITATION:

大池, 宏清. 射影空間の高次接バンドル (Extraordinary cohomology theories研究会報告集). 数理解析研究所講究録 1970, 103: 1-18

ISSUE DATE:

1970-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106303>

RIGHT:

射影空間の高次接バンドル

山形大 理 大池 宏清

[2], [3], [6], [7] 等において W. F. Pohl や E. A. Feldman は 1 次よりも高次の微分をも使った微分幾何と位相幾何の道具 (特にベクトルバンドル) を駆使して展開した。それらはまず高次接バンドルを定式化し, 空間曲線の接触平面の概念を多様体から多様体への写像に対して *higher order osculating map* として定式化した。このときこの写像の値域にあたる多様体にあらかじめ *symmetric linear connection* が導入されていることが必要である。続いて Whitney の *immersion, embedding, regular homotopy* に関する定理の *higher order* への拡張がなされ, さらに *higher order immersion* に対しては, 空間曲線の *binormal* にあたる *higher order normal bundle*, 第 2 基本型式の *codimension* が 1 より大きい場合への一般化にあたる *higher order normal form*, そして *higher order inflection point* 等が

定式化され高次の微分をも含めた *immersions* の幾何学が論ぜられている。なお [2] の最後で前述の Whitney の *immersions embeddings* に関する定理の *higher order* の場合への拡張が一般に最良であることを低次元の射影空間の高次接バンドルの特性類を計算することにより示されている。[9], [10], [11] において H. Suzuki はこれを一般次元の射影空間に拡張し特性類, *r*-operations, *spin operations* 等を用いて, 射影空間の実アファイン空間, 射影空間への *higher order non-immersion* を考察した。[12] において C. Yoshioka は複素射影空間および Dold 多様体の高次接バンドルの Stiefel-Whitney 類を完全に計算しそれとこれらの多様体の実アファイン空間への *higher order non-immersion* に応用した。ここでは複素射影空間と四元数射影空間の高次接バンドルがそれぞれの KO 環のどの様な元になるかを計算し, それを用いて特性類を求め, さらにその結果を四元数射影空間の実アファイン空間への *higher order non-immersion* に応用する。

§ 1. 準備

G はコンパクト連結リー群, F は R または C i.e. 実数体または複素数体, V は F 上の有限次元 G -ベクトル空間, さらに $[V]$ は V の G -同型類とし, V の F 上の次元は $[V]$ の

degree という. $O^k V$ は V の F 上の k 回対称積とする, そのとき G は $O^k V$ に次の様に作用する:

$$\forall g \in G, \forall v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k \in O^k V.$$

$$g(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k) = g v_1 \otimes g v_2 \otimes \cdots \otimes g v_k,$$

> に $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k$ は $\otimes^k V$ から $O^k V$ への対称化作用素による $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k$ の像とする. それ故 $O^k V$ は F 上の $\binom{n+k-1}{k}$ 次元 G -ベクトル空間 ($\dim_F V = n$) である.

補題 1.1. V が F 上の 1 次元 G -ベクトル空間ならば $O^k V$ は $\otimes^k V$ に G 同型である.

$M_F(G)$ を F 上の有限次元 G -ベクトル空間の G -同型類全体がなす *simiring* とする. 積と和は G -ベクトル空間のテンソル積と直和により定義される. $M_F(G)$ における k 回対称幂作用素 O^k は次の様にして定義する, $\forall (V) \in M_F(G)$ に対し

$$O^k(V) = \{O^k V\}$$

O^k は次の様な性質をもつ:

- i) $O^0(x) = 1, O^1(x) = x$ for $x \in M_F(G)$
- ii) $O^k(x+y) = \sum_{i+j=k} O^i(x) O^j(y)$ for $x, y \in M_F(G)$
- iii) $O^k(x) = x^k$ for $x \in M_F(G)$; degree $x = 1$.

$R_F(G)$ を $M_F(G)$ の ring completion, $\theta: M_F(G) \rightarrow R_F(G)$ を自然な包含写像とする. そのとき上の O^k は $R_F(G)$ に拡大され性質 i), ii) はみられるが iii) は $\text{Im } \theta$ においてみた

される. 次に r, c, ψ_c^{-1} を次の様な作用素とする:

$$r: R_c(G) \longrightarrow R_R(G) \quad \text{realification}$$

$$c: R_R(G) \longrightarrow R_c(G) \quad \text{complexification}$$

$$\psi_c^{-1}: R_c(G) \longrightarrow R_c(G) \quad \text{complex conjugation.}$$

次の補題はよく知られている. ([4] 参照).

補題 1.2. i) r は加群準同型, c および ψ_c^{-1} は環準同型.

ii) $rc=2, cr=1+\psi_c^{-1}$. iii) c は単射. iv) $c0^k=0^kc$.

次に t を不定元とし, $R_F(G)$ に係数をもつ変数 t の無限級数全体をなす環 $R_F(G)((t))$ における units の全体をなす乗法群を $1+R_F(G)((t))^+$ であらわす.

$$O_t: R_F(G) \longrightarrow 1+R_F(G)((t))^+$$

を次の様に定義する:

$$O_t(X) = \sum_{k=0}^{\infty} 0^k(X) t^k \quad \text{for } X \in R_F(G).$$

なお $X \in I_m \theta$ が degree 1 であるとき補題 1.1 により

$$O_t(X) = 1 + Xt + X^2 t^2 + \dots = \frac{1}{1-Xt} \quad \text{である.}$$

次の定理は [4] にのべられている.

定理 1.3. $R_c(\Pi(1))$ は $\mathbb{Z}\langle z, z^{-1} \rangle$ と e, f を変数とする整数係数の有限 Laurent 級数全体をなす環である, $\langle \cdot \rangle$ には $\Pi(1)$ が C に次の様に作用している C 上の 1 次元ベクトル空間の $\Pi(1)$ -同型類を表わす, for $e^{i\theta} \in \Pi(1)$ and $w \in C$

$$(e^{i\theta}, w) \longmapsto e^{i\theta} w,$$

ならば $\eta = \psi^{-1}(\eta) = \psi^{-1}(\eta)$.

$\eta = r\eta - 2 \in R_R(\mathbb{U}(1))$ とする, そのとき次の補題を得る.

補題 1.4. i) $\psi_R^k(\eta) = r\eta^k - 2$, $\psi_R^0(\eta) = 0$, $\psi_R^1(\eta) = \eta$,
 $\psi_R^{-k}(\eta) = \psi_R^k(\eta)$, ii) $\psi_R^i(\eta) \psi_R^j(\eta) = \psi_R^{i+j}(\eta) + \psi_R^{j-i}(\eta)$
 $- 2(\psi_R^i(\eta) + \psi_R^j(\eta))$, iii) $\psi_R^k(\eta) = \sum_{j=1}^k A_j^k \eta^j$,
 iv) $\eta^j = \sum_{i=1}^j (-1)^{j-i} \binom{2j}{j-i} \psi_R^i(\eta)$, $j > 1$ に ψ_R^k は k -th
 real Adams 作用素 ([1] 参照), A_j^k は次の様な自然数とす

$$A_j^k = \frac{2}{(2j)!} \prod_{i=1}^{j-1} (k^2 - i^2) = \frac{k}{j} \binom{k+j-1}{2j-1}.$$

証明は単なる計算にすぎないのでくわしいことは略するが

iii) については ii) から $\psi_R^k(\eta) = (\eta + 2) \psi_R^{k-1}(\eta) - \psi_R^{k-2}(\eta) + 2\eta$
 がえられる, これを用いて数学的帰納法により容易に証明で
 きる.

次に高次接バンドル, higher order osculating map,
 higher order normal bundle 等について述べる.

X を n -次元パラコンパクト C^∞ -多様体とする. $\mathbb{U} \in X$ の
 一つの座標近傍, その座標函数を (x_1, x_2, \dots, x_n) とする.

\mathbb{U} の上の微分可能函数の全体からなる環を $C^\infty(\mathbb{U})$ とかく.

$x \in \mathbb{U}$ とするとき, $\partial^f / \partial x_{\mu_1} \partial x_{\mu_2} \cdots \partial x_{\mu_f} |_x$ は, $f \in C^\infty(\mathbb{U})$
 に $\partial^f f / \partial x_{\mu_1} \partial x_{\mu_2} \cdots \partial x_{\mu_f} |_x$ を対応させる linear func-
 tional とする. $\tau_k(X)_x$ を一次独立な linear functionals,

$\{\partial^j / \partial x_{\mu_1} \partial x_{\mu_2} \cdots \partial x_{\mu_j} |_x ; 1 \leq j \leq k, 1 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_j \leq n\}$
 によって張られる $\binom{n+k}{k} - 1 = V(n, k)$ 次元の実ベクトル空間とし, $T_k(X) = \bigcup_{x \in X} T_k(X)_x$ とおくと $T_k(X)$ は, X の上の C^∞ -ベクトルバンドルとなる。これを k -th order tangent bundle という。

X から R への, x を 0 に写す函数の k -jet 全体を $J^k(X)_x$ とかく。 $J^k(X) = \bigcup_{x \in X} J^k(X)_x$ は, k -jet のバンドルであるが, $T_k(X)$ は, $J^k(X)$ の双対ベクトルバンドルとなる。

即ち, $T_k(X) \cong J^k(X)^*$ 。

X, Y を各々 n, N 次元パラコンパクト C^∞ 級多様体, $f: X \rightarrow Y$ を C^∞ -級写像とすると f の右側から函数結合を用いて, ベクトルバンドルの C^∞ -homomorphism, $T_k(f): T_k(X) \rightarrow T_k(Y)$ が得られる。これは f の k -th differential といわれる。

$k > 1$ とする, $I_{k-1}: T_{k-1}(X) \rightarrow T_k(X)$ を自然な包含写像, $\pi_{k-1}: T_k(X) \rightarrow T_k(X)/T_{k-1}(X)$ を projection homomorphism とする。

$m_{k-1}(\partial/\partial x_{i_1}|_x \circ \partial/\partial x_{i_2}|_x \circ \cdots \circ \partial/\partial x_{i_k}|_x) = \pi_{k-1}(\partial^k/\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}|_x)$ とおくと, m_{k-1} はベクトルバンドルの微分可能な同型, $O^k T(X) \cong T_k(X)/T_{k-1}(X)$ を定める。なお今後 $T_k(\)$ を $T(\)$ と記すことにする。

$$m_{k-1}^{-1} \pi_{k-1} = p_{k-1}: T_k(X) \rightarrow O^k T(X)$$

とおくことにより、ベクトルバンドルの short exact 列

(*)_k $0 \longrightarrow T_{k-1}(X) \xrightarrow{I_{k-1}} T_k(X) \xrightarrow{P_{k-1}} O^k T(X) \longrightarrow 0$ が得られる. C^∞ -写像 $f: X \longrightarrow Y$ に対して, short exact 列の homomorphism,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T_{k-1}(X) & \xrightarrow{I_{k-1}} & T_k(X) & \xrightarrow{P_{k-1}} & O^k T(X) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow T_{k-1}(f) & & \downarrow T_k(f) & & \downarrow O^k T(f) \\ 0 & \longrightarrow & T_{k-1}(Y) & \xrightarrow{I_{k-1}} & T_k(Y) & \xrightarrow{P_{k-1}} & O^k T(Y) \longrightarrow 0 \end{array}$$

がなりたつ.

$D_Y^{(f)}: T_{j+1}(Y) \longrightarrow T_j(Y)$ を Y に対する $(*)_{j+1}$ の, C^∞ -splitting とする. Y がパラコンパクト C^∞ -多様体ならば, C^∞ -splitting は常に存在し, Y の上の j -th order dissection (symmetric linear connections の j -次接バンドルへの一般化) と 1 対 1 に対応し, さらに Y に symmetric linear connection を定めると, 各 $j \geq 1$ に対し一意に j -th order dissection, 即ち j -th splitting $D_Y^{(f)}$ が定まることが知られている [2] 参照.

そこで Y に symmetric linear connection i.e. first order dissection を定めると次の様な homomorphism が定まる.

$$D_k = D_Y^{(1)} \cdots D_Y^{(k-1)}: T_k(Y) \longrightarrow T(Y).$$

これと $T_k(f)$ とを結合して得られる $f: X \longrightarrow Y$ の covering

homomorphism

$$D_k T_k(f) : T_k(X) \longrightarrow T(Y)$$

を $\{ D_k^{(f)} Y ; f=1, 2, \dots \}$, あるいは Y に与えられた symmetric linear connection に関する f の k -th order osculating map という。各点 $x \in X$ に対し, $D_k T_k(f)_x : T_k(X)_x \rightarrow T(Y)_{f(x)}$ が maximal rank ならば f を k -th order nondegenerate map という。

$f : X \rightarrow Y$ を k -th order nondegenerate map とする。 $f^{-1}T(Y)$ を f による $T(Y)$ の induced bundle, $D_k T_k(f)!$ を $D_k T_k(f)$ による $T_k(X)$ から $f^{-1}T(Y)$ への homomorphism とする。 $N \geq V(n, k)$ のとき, $\text{Cokernel}(D_k T_k(f)!) = V_{fY}^k(X)$ とし, これを f に関する X の Y における k -th order normal bundle という。これは空間曲線の binormal にあたる概念である。 $N \leq V(n, k)$ のとき, $\text{Kernel}(D_k T_k(f)!) = K_{fY}^k(X)$ とし, f に関する X の Y における k -th order co-normal bundle という。以上より次のことがわかる。
 1) $N \geq V(n, k)$, then $T_k(X) \oplus V_{fY}^k(X) \approx f^{-1}T(Y)$,
 2) $N \leq V(n, k)$, then $T_k(X) \approx f^{-1}T(Y) \oplus K_{fY}^k(X)$.

Y には symmetric linear connection が定められてい
 り $N \geq V(n, k)$ とし, $f : X \rightarrow Y$ を k -th order nondegenerate map とする。このとき, $D_{k+1} T_{k+1}(Y) : T_{k+1}(X) \rightarrow$

$\tau(Y)$ の rank が maximal でない X の点を k -th order inflection point という。

$C^k(X, Y)$ は X から Y への C^k -maps の全体からなる集合とし、これに次の様に位相を入れる。

ξ, η を各々 X, Y の上の C^∞ -vector bundle とする。このとき積空間 $X \times Y$ 上の C^∞ -vector bundle $\text{Hom}(\xi, \eta)$ は点 $(x, y) \in X \times Y$ 上の fiber が $\text{Hom}(\xi, \eta)(x, y) = \text{Hom}_R(\xi_x, \eta_y)$ となるようなものとする。

$C^0(X, \text{Hom}(T_k(X), T_k(Y)))$ は X から位相空間 $\text{Hom}(T_k(X), T_k(Y))$ への連続写像全体からなる集合に compact open topology を入れた位相空間とする。写像 $e_k: C^k(X, Y) \rightarrow C^0(X, \text{Hom}(T_k(X), T_k(Y)))$ を $e_k(f)_x = T_k(f)_x$ と定義するとき e_k は容易に単射となることがわかる。 $C^k(X, Y)$ の位相は e_k による $C^0(X, \text{Hom}(T_k(X), T_k(Y)))$ からの induced topology とする、この位相を τ^k と書き C^k topology of compact convergence という。このとき $p \leq q$ なら、

natural inclusion map $i_p^q: C^q(X, Y) \rightarrow C^p(X, Y)$ は連続写像となる。以上のことから $\{(C^k(X, Y), \tau^k): k=0, 1, 2, \dots\}$

は inverse mapping system となる。この inverse limit

$C^\infty(X, Y) = \text{invlim } C^k(X, Y)$ は X から Y への C^∞ -map の全体からなる集合と考えてよい。これに inverse limits

Topology $\mathcal{C}^\infty = \text{inv. lim. } \mathcal{C}^k$ を入れる.

Whitney の immersion, embedding theorem の higher order の場合にあたるものとして次の定理がある簡単のために X をコンパクトする.

定理 1.5. X をコンパクト n 次元 \mathcal{C}^∞ -多様体 Y をパラコンパクト N 次元 \mathcal{C}^∞ -多様体, $k \geq 2$, $N \geq V(n, k) + n$ ならば, X から Y への k -th order nondegenerate \mathcal{C}^∞ -embeddings の全体の集合は $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$ の open and dense subset である.

注意. $k=1$ のとき, $N \geq 2n$ ならば immersions の全体は $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$ の open and dense subset である.

$I(X, Y), E(X, Y)$ は各々 \mathcal{C}^∞ -immersions, \mathcal{C}^∞ -embeddings 全体からなる $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$ の部分空間とする.

定理 1.6. X はコンパクト n 次元 \mathcal{C}^∞ -多様体, Y はパラコンパクト N 次元 \mathcal{C}^∞ -多様体, $N \leq V(n, k) - n$ ならば k -th order nondegenerate \mathcal{C}^∞ -immersions (embeddings) 全体からなる集合は $I(X, Y) (E(X, Y))$ の open and dense subset である. この上さらに $2n \leq N \leq V(n, k) - n$ ならば k -th order nondegenerate \mathcal{C}^∞ -immersions 全体からなる集合は $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$ の open and dense subset である.

次に $Y = \mathbb{R}^N$ の場合を考えてみる. \mathbb{R}^N は自然なリーマン計量により与えられる symmetric linear connection がある.

これにより定まる k -th order dissection $D^{(k)}$ は次の様になる;
 (y_1, y_2, \dots, y_N) を R^N の通常の global coordinate functions
 とする. そのとき $k+1$ -th order vector field を L とする,
 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ は multi-index である.

$$L = \sum_{|\alpha| \leq k+1} \phi_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\alpha, \quad \phi_\alpha \in C^\infty(R^N)$$

とあらわすとき,

$$D^{(k)} L = \sum_{|\alpha| \leq k} \phi_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\alpha$$

となる. つまり $D^{(k)}$ は $k+1$ -th order terms を消す.

$f: X \longrightarrow Y = R^N$ k -th order nondegenerate C^∞ -maps
 とする. $N \geq V(n, k)$ ならば

$$T_k(X) \oplus V_f^k(X) \cong N,$$

ここに $V_f^k(X) = V_{f^* R^N}^k(X)$ さらに N は N 次 trivial bundle である. またもし $N \leq V(n, k)$ ならば

$$T_k(X) \cong N \oplus X_f^k(X),$$

$$\text{ここに } X_f^k(X) = V_{f^* R^N}^k(X).$$

このことから次の定理をうる.

定理 1.7. X から R^N へ k -th order nondegenerate
 map があるなら, $N \geq V(n, k)$ のときは $i > N - V(n, k)$ なる
 整数 i に対し $\bar{W}_i(T_k(X)) = 0$, また $N \leq V(n, k)$ のときは
 $i > V(n, k) - N$ なる整数 i に対し $W_i(T_k(X)) = 0$, ことに

$W_i(\tau_k(X))$, $\bar{W}_i(\tau_k(X))$ はそれぞれ $\tau_k(X)$ の i -th Stiefel-Whitney class, i -th dual Stiefel-Whitney class.

高次接バンドルについてさらに計算を進めてみる. X を パフコンパクト C^∞ 多様体とするとき, 次の short exact 列

$$0 \longrightarrow \tau_{k-1}(X) \longrightarrow \tau_k(X) \longrightarrow O^k \tau(X) \longrightarrow 0$$

これにより帰納的に次の事実がわかる.

$$\tau_k(X) = O^k \tau(X) + O^{k-1} \tau(X) + \cdots + O^1 \tau(X).$$

対称冪作用素 O^k の性質 ii) から

$$\tau_k(X) + 1 = O^k(\tau(X) + 1).$$

§2. 本論

最初に, 鍵となる次の補題を証明する.

補題 2.1.

$$O^k((n+1)r_z) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{n+j}{j} \binom{n+k-j}{k-j} \psi_R^{k-2j}(n) + \binom{2n+1+k}{k}.$$

$$\text{証明)} \quad O_x((n+1)cr_z) = (O_x(z+z^{-1}))^{-(n+1)}$$

$$= (1-zx)^{-(n+1)} (1-z^{-1}x)^{-(n+1)}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i+j=k} \binom{n+i}{i} \binom{n+j}{j} z^{j-i} \right\} x^k.$$

よって

$$CO^k((n+1)r_z) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{n+j}{j} \binom{n+k-j}{k-j} \left(z^{k-2j} + z^{-(k-2j)} - 2 \right) + \binom{2n+1+k}{k}.$$

$C\psi_R^i(\eta) = j^i + j^{-i} - 2$, C が単射であることにより証明が完成する.

CP^n は n 次元複素射影空間, h_C は CP^n 上の canonical line bundle とする.

$T(CP^n) + 2 = (n+1)rh_C$ であることはよく知られている.

$$\begin{aligned} T_k(CP^n) + 1 &= O^k((n+1)rh_C - 1) \\ &= O^k((n+1)rh_C) - O^{k-1}((n+1)rh_C). \end{aligned}$$

実際, $O_t((n+1)rh_C - 1) = O_t((n+1)rh_C) O_t(1)^{-1}$

$$\begin{aligned} &= O_t((n+1)rh_C) \left(\frac{1}{1-t} \right)^{-1} = O_t((n+1)rh_C)(1-t) \\ &= O_t((n+1)rh_C) - t O_t((n+1)rh_C). \end{aligned}$$

このことより明らかである. よって上の補題から次の定理をうる.

定理 2.2. $y = rh_C - 2$ とする, そのとき

$$\begin{aligned} T_k(CP^n) + 1 &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{n+j}{j} \left\{ \binom{n+k-j}{k-j} \psi_R^{k-2j}(y) \right. \\ &\quad \left. - \binom{n+k-j-1}{k-j-1} \psi_R^{k-1-2j}(y) \right\} + \binom{2n+k}{k}. \end{aligned}$$

C. Yoshioka の定理はこの定理の系としても得られる.[12]

系 2.3. (C. Yoshioka) $W(T_k(CP^n))$ は $T_k(CP^n)$ の total Stiefel-Whitney class とすると

$$W(T_k(\mathbb{C}P^n)) = \begin{cases} (1+\bar{x})^{-\frac{1}{2}} \binom{2n+k}{k-1} & \text{for even } k \\ (1+\bar{x})^{\frac{1}{2}} \binom{2n+k+1}{k} & \text{for odd } k \end{cases}$$

ここで x は k_c の first Chern class とし, $\bar{x} = x \bmod 2$ とする.

証明) $W(\psi_R^j(y)) = W(rh_c^j) = C(h_c^j) \bmod 2 = 1 + j\bar{x},$

ここで $C(h_c^j)$ は h_c^j の total Chern class である.

よって,

$$W(\psi_R^j(y)) = \begin{cases} 1 & \text{for even } j, \\ 1 + \bar{x} & \text{for odd } j. \end{cases}$$

一般に奇正整数 l と正整数 m に対し

$$\sum_{j=0}^{\frac{l-1}{2}} \binom{m+j}{j} \binom{m+l-j}{l-j} = \frac{1}{2} \binom{2m+l+1}{l}$$

であることは証明を完成する.

補題 1.4 の iii) から $KO(\mathbb{C}P^n)$ における ψ_R^k の様子は

$$\psi_R^k(y) = \sum_{j=1}^k \frac{k}{j} \binom{k+j-1}{2j-1} y^j$$

により完全にわかる. これより例えば次の様になる.

$$T_2(\mathbb{C}P^n) + 1 = \binom{n+2}{2} y^2 + \binom{2n+3}{2} y + \binom{2n+2}{2}$$

$$\begin{aligned} \tau_3(\mathbb{C}P^n) + 1 &= \binom{n+3}{3} y^3 + (2n+5) \binom{n+2}{2} y^2 \\ &\quad + 6 \binom{2n+4}{3} y + \binom{2n+3}{3}. \end{aligned}$$

次に四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ については結果だけをのべる。
 $\mathbb{C}P^n$ の場合より多少複雑になるが本質的な差異はない。詳しくは [5] 参照。 \mathcal{L}_H を $\mathbb{H}P^n$ の上の canonical complex plane bundle とし, $\pi: \mathbb{C}P^{2n+1} \rightarrow \mathbb{H}P^n$ を canonical S^2 -bundle とする。 $\pi!: KO(\mathbb{H}P^n) \rightarrow KO(\mathbb{C}P^{2n+1})$ を π による induced ring homomorphism とする。これは単射である ([8] 参照)。

定理 2.4. $\pi! \tau_k(\mathbb{H}P^n) + 1 = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{2n+1+j}{j} \binom{2n+1+k-j}{k-j} \psi_R^{k-2j}(y)$

$$- \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1} \binom{2n+1+j}{j} \binom{2n+1+k-1-j}{k-1-j} (\psi_R^{k+1-2j}(y) + \psi_R^{k-2j}(y) + \psi_R^{k-1-2j}(y))$$

$$+ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{2n+1+j}{j} \binom{2n+1+k-2-j}{k-2-j} (\psi_R^{k-2j}(y) + \psi_R^{k-2-2j}(y) + \psi_R^{k-4-2j}(y))$$

$$- \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 2} \binom{2n+1+j}{j} \binom{2n+1+k-3-j}{k-3-j} \psi_R^{k-3-2j}(y)$$

$$+ (-1)^k \binom{2n+1 + \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \psi_R^2(y) + \binom{4n+k}{k}.$$

\mathcal{F} を \mathcal{L}_H の second Chern class とする。 \mathcal{F} は $H^*(\mathbb{H}P^n; \mathbb{Z})$

generator となる. $\bar{q} = q \bmod 2$ とする. さらに $N_o(n, k)$, $N_e(n, k)$ を次の様な自然数とする.

$$N_o(n, k) = \frac{1}{4} \binom{4n+k+3}{k} + \frac{3}{4} \binom{4n+k+1}{k-2} \quad \text{for odd } k,$$

$$N_e(n, k) = \frac{1}{4} \binom{4n+k+2}{k-1} + \frac{3}{4} \binom{4n+k}{k-3} \quad \text{for even } k.$$

次の系を得る.

$$\text{系 2.5.} \quad W(\mathcal{L}_k(\text{HP}^n)) = \begin{cases} (1+\bar{q})^{N_o(n, k)} & \text{for odd } k, \\ (1+\bar{q})^{N_e(n, k)} & \text{for even } k. \end{cases}$$

$\delta_o(n, k)$, $\sigma_o(n, k)$, $\delta_e(n, k)$, $\sigma_e(n, k)$ を次の様な自然数とする.

$$\delta_o(n, k) = \max \left\{ 1 \leq i \leq n; \binom{N_o(n, k)}{i} \not\equiv 0 \pmod{2} \right\},$$

$$\sigma_o(n, k) = \max \left\{ 1 \leq i \leq n; \binom{N_o(n, k) + i - 1}{i} \not\equiv 0 \pmod{2} \right\},$$

$$\delta_e(n, k) = \max \left\{ 1 \leq i \leq n; \binom{N_e(n, k)}{i} \not\equiv 0 \pmod{2} \right\},$$

$$\sigma_e(n, k) = \max \left\{ 1 \leq i \leq n; \binom{N_e(n, k) + i - 1}{i} \not\equiv 0 \pmod{2} \right\}.$$

定理 1.7 から次の系を得る.

系 2.6. 整数 m は, もし k が奇なら $-4\delta_o(n, k) < m < 4\sigma_o(n, k)$

の様に, もし k が偶なら $-4\delta_e(n, k) < m < 4\delta(n, k)$ の様に定める, そのとき

$$HP^n \not\subseteq_k R^{V(4n, k) + m}$$

文 献

- (1) J.F. Adams; Vector fields on spheres, *Ann. of Math.*, 75 (1962), 603-632.
- (2) E.A. Feldman; The geometry of immersions I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 120 (1965), 185-224.
- (3) _____; _____ II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 125 (1966), 181-215.
- (4) D. Husemoller; *Fiber Bundles*, McGraw-Hill.
- (5) H. Ôike; Higher order tangent bundles of projective space and lens spaces, *Tohoku Math. J.*, 22 (1970), 200-209.
- (6) W.F. Pohl; Differential geometry of higher order, *Topology* 1 (1962), 169-211.
- (7) _____; Connexion in differential geometry of higher order, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 125 (1966), 310-325.
- (8) B.J. Sanderson; Immersions and embeddings of projective spaces, *Proc. London Math. Soc.*, (3) 14 (1964), 137-153.

- (9) H. Suzuki; Bounds for dimensions of odd order non-singular immersions of RP^n , Trans. Amer. Math. Soc., 121(1966), 269-275.
- (10) _____; Characteristic classes of some higher order tangent bundles of complex projective spaces, J. Math. Soc. Japan, 18(1966), 386-393.
- (11) _____; Higher order non-singular immersions in projective spaces, Quart. J. Math. Oxford (2), 20(1969), 33-44.
- (12) C. Yoshioka; On the higher order non-singular immersions, Sci. Rep. Niigata Univ. Ser. A, 5(1967), 23-30.